



جبر خطی

نیم‌سال اول ۹۹

مدرس: دکتر حمیدرضا ربیعی

تاریخ تحویل: ۲۲ مهر

تمرین سوری اول

۱. به سوالات زیر پاسخ دهید.

- ثابت کنید تجزیه LU یک ماتریس، یکتاست.
- دستگاه زیر را به روش تجزیه LU حل کنید.

$$\begin{cases} u + 3v + 2w = 11 \\ u + 2v + 2w = 10 \\ 2u + 3v - 4w = 3 \end{cases}$$

۲. تجزیه متقارن LDL^T را برای ماتریس دوران بدست آورید.

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

۳. فرض کنید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & A_2 & \cdots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & A_k \end{bmatrix}$$

A_i ها ماتریس‌هایی مربعی و روی قطر A هستند. ثابت کنید A وارون پذیر است اگر و تنها اگر تمام A_i ها وارون پذیر باشند.

۴. فرض کنید نگاشت $T: V \rightarrow W$ یک نگاشت یک به یک باشد. و v_1, \dots, v_n در V مستقل خطی باشد. ثابت کنید Tv_1, \dots, Tv_n هم در W مستقل خطی است.

۵. نشان دهید اگر روش حذف گاوسی بدون جابجایی را بتوان بر روی یک ماتریس متقارن اعمال کرد، ماتریس باقی مانده در هر مرحله نیز متقارن خواهد بود.
ماتریس متقارن به ماتریسی گفته می‌شود که برای هر i و j داشته باشیم: $A_{ij} = A_{ji}$

۶. آیا سه بردار u, v, w در صفحه xy وجود دارند بصورتی که حاصل ضرب داخلی دو به دو آن‌ها عددی منفی باشد؟

• حداکثر چند بردار در صفحه xy می‌توان یافت که حاصل ضرب داخلی دوه‌دو آن‌ها منفی باشد؟

۷. ثابت کنید که اگر C را یک فضای برداری ساخته شده توسط میدان برداری حقیقی در نظر بگیریم، آنگاه $(1+i, 1-i)$ مستقل خطی اند.

- ثابت کنید که اگر C را یک فضای برداری ساخته شده توسط میدان برداری مختلط در نظر بگیریم، آنگاه $(1+i, 1-i)$ وابسته خطی اند.
 C همان فضای برداری مختلط است.

۸. عدد t را به گونه‌ای بیابید که ۳ بردار زیر در R^3 وابسته خطی باشند.

$$(4, 8, 9), (5, 7, 9), (6, 8, t)$$

۹. ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- آن را به فرم LU بنویسید به طوری که L یک ماتریس پایین مثلثی و U بالا مثلثی باشد.
 - آن را به فرم LL^T بنویسید به طوری که L یک ماتریس پایین مثلثی باشد.
- تمامی مراحل حل را ذکر کنید.
۱۰. نشان دهید حاصل ضرب دو ماتریس پایین مثلثی، پایین مثلثی خواهد بود.
- نشان دهید حاصل ضرب دو ماتریس پایین مثلثی واحد (*unit lower-triangular matrices*)، پایین مثلثی واحد خواهد بود.
 - نشان دهید وارون یک ماتریس پایین مثلثی وارون پذیر، پایین مثلثی خواهد بود و وارون یک ماتریس پایین مثلثی واحد وارون پذیر، پایین مثلثی واحد خواهد بود.